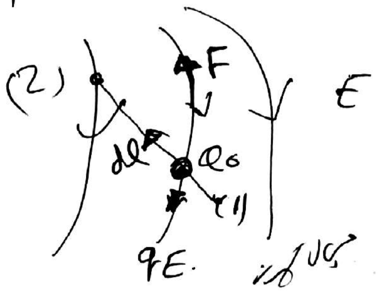
1

lec (8)

Ch(5) Work & Potential

اذا اردنا تحريك شحنة Q من أ إلى (1) لـ (2) لابد من التأثير بقوة F عكس القوة التي تؤثر بها المجال



$$F = -qE$$

الشغل المبذول لنقل الشحنة من مكانها

$$\& \ \omega = F \cdot \text{distance}$$

$$\omega = \int_1^2 F \cdot dl$$

$$\therefore \omega_{12} = \int_1^2 -qE \cdot dl$$

$$\& \ \omega_{12} = -Q_0 \int_1^2 \bar{E} \cdot \bar{dl}$$

EX (1) Find the work required to move 2 C charge from B(1, 0, 1) to A(0.8, 0.6, 1) along shorter area of circle $x^2+y^2=1$, $z=1$ if $E = y\hat{a}_x + x\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

Sol

$$W = -Q\int_1^2 \bar{E}\cdot\bar{dl} = -2\int_B^A \bar{E} \cdot (dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$

$$-2\int_B^A (y\hat{a}_x + x\hat{a}_y + 2\hat{a}_z) \cdot (dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= -2\int_B^A (y\,dx + x\,dy + 2\,dz)$$

②

$\because x^2+y^2=1$, $z=1$

$\therefore$ $\cancel{dz}$

$dx \Rightarrow$ $x^2 = 1-y^2$

$x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \omega = -2\left[\int_{B=1}^{A=0.8} y\,dx + \int_{B=0}^{A=0.6} x\,dy + \int_{B=1}^{A=1} 2\,dz\right]$$

$$\omega = -2\left\{\int_1^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy + \int_1^1 2\,dz\right\}$$

$$= -2\left[\left[\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right]_1^{0.8} + \left[\sin^{-1}y + y\sqrt{1-y^2}\right]_0^{0.6} + 2z\Big]_1^1\right]\right.$$

$$= -0.96\ J$$

③

EX(2)

Use the same data of Prob (1) to get the work done to move 2C from B → A Through straight line Path bet A & B

Sol

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.6 - 0}{0.8 - 1} \quad \& \quad \frac{z - 1}{y - 0} = 0$$

$y_1 = 0$, $x_1 = 1$

$$\therefore \boxed{y = -3x + 3} \qquad z = 1$$

$$W = -2\int_1^{0.8} y\,dx - 2\int_0^{0.6} x\,dy - 4\int_1^1 dz$$

$$= -2\int_1^{0.8} (-3x + 3)\,dx - 2\int_0^{0.6} \frac{3 - y}{3}\,dy$$

$$= -2\left[-\frac{3x^2}{2} + 3x\right]_1^{0.8} - 2\left[x - \frac{y^2}{6}\right]_0^{0.6}$$

$$= -0.96 \text{ J}$$

وبكذا نستنتج أن w لا تعتمد على المسار أو الطريق
وانما تعتمد على نقطتي البداية والنهاية

Remember

$$d\vec{l} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$$

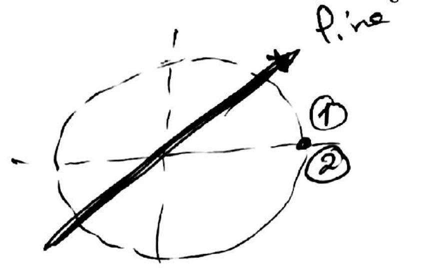
$$= d\rho\,\hat{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\hat{a}_\phi + dz\,\hat{a}_z$$

$$= dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{a}_\phi$$

---

④

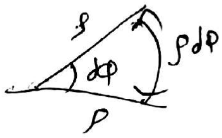
EX) Find the Work done in Carrying a positive charge Q about circular path of radius ρ Centered at the infinite line.



$$\underset{\text{for line}}{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r \qquad r=\rho$$

$$W_{12} = -Q\int_1^2 E\cdot dl$$

$dl = \rho\, d\phi\, \hat{a}_\phi$ (مركز الـline دائرة)

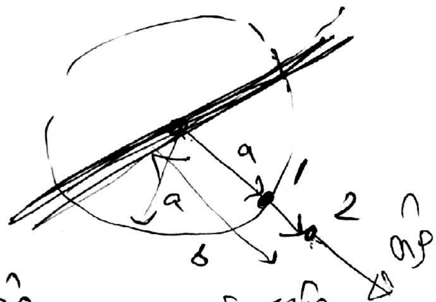


مسار دائري ← 2π

$$W = -Q\int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\cancel{\hat{a}_r\cdot\rho\, d\phi\, \hat{a}_\phi} \to 0 \qquad \hat{a}_r\cdot\hat{a}_\phi = 0$$

أطول حجة واحدة الدائرة فلا تحتاج لشغل لتحريك الشحنة مسار

لو طلب التحريك في اتجاه كده من ① لـ ②



$$W = -Q\int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r\cdot d\rho\,\hat{a}_\rho \qquad \bar{dl} = d\rho\,\hat{a}_\rho$$

b ← من برا

a ← من الداخل

$$\hat{a}_r\cdot\hat{a}_\rho = 1$$

$$= -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho\Big|_a^b$$

$$= -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(b)-\ln(a)\right) = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\hat{a}_r = \left((\;)\hat{a}_r + (\;)\hat{a}_\phi + (\;)\hat{a}_z\right)\cdot(\hat{a}_\rho)$$

zero zero

$\hat{a}_\rho = \hat{a}_r$ للشكل الأخير

Ex(4)

Calculate the work done in moving 4-C charge from $B(1,0,0)$ to $A(0,2,0)$ along the path

[illegible] $y = 2-2x$, $z = 0$ & of the field is

a) $E = 5\hat{a}_x$ b) $E = 5x\hat{a}_x$ c) $E = 5x\hat{a}_x + 5y\hat{a}_y$

Sol

(a)

$$dl = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$$

$$W = -Q\int_B^A E \cdot dl$$

$$= -4\left[\int_B^A 5\hat{a}_x \cdot (dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)\right]$$

$$= -4\left[\int_{Bx}^{Ax} 5\,dx + 0\right] = -20\int_1^0 dx = -20x\Big]_1^0 = +20\ J$$

لاحظ هنا اني مش محتاج علاقة عشان مفيش عندي y

(b) $$W = -4\int (5x\,\hat{a}_x)\cdot(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= -20\int_1^0 x\,dx = -\frac{20}{2}x^2\Big|_1^0 = +10\ J$$

(c) $$W = -4\int (5x\,\hat{a}_x + 5y\,\hat{a}_y)\cdot(dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z)$$

$$= -4\left[\int 5x\,dx + 5y\,dy\right]$$

$$= -4\left[\left[\frac{5}{2}x^2\right]_1^0 + \left[\frac{5}{2}y^2\right]_0^2\right] = -30\ J$$

لاحظ ما فاضلتش الحد [illegible] مع معادلة $y=2-2x$

علشان مفيش $x\,dy$ أو $y\,dx$

(6)

تابع شهر

Ch(5)
Ch(4) hayt Work & Potential

لو عندك شحنه اسمها q وموجوده في مجال اسمه E بالشكل ده

∴ يبقى على الشحنه قوة اسمها qE في اتجاه E

F = qE ← ① → ② +q ← E

∴ لنقل الشحنه من ① إلى ② ∴ مضطر تبذل شغل يعاكس المجال

لو قسمت الشغل ع قيمة الشحنه = فرق الجهد بين النقطتين ٢، ١

فرق الجهد = الشغل المبذول لنقل شحنه بين نقطتين

عكس، عن

W_{12} ∴ $\Delta V_{12} = \frac{W_{12}}{q}$ J/c = Volt

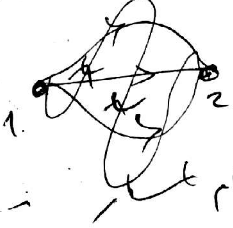
لو أنا طلبت جهد ١ (∞) .. اتفقنا إن جهد ال ∞ = صفر

∴ جهد نقطه = الشغل المبذول لتحريك وحدة الشحنات من ∞ للنقطه

∴ $\Delta V_{12} = V_2 - V_\infty$

* Electric potential is scalar
* Potential for earth = zero
* has +ve Value for +ve charge
" -ve " " -ve "
* doesn't depend on path
* Nor two Points with Same Potential (No need to do work)

الشغل لا يعتمد ع المسار



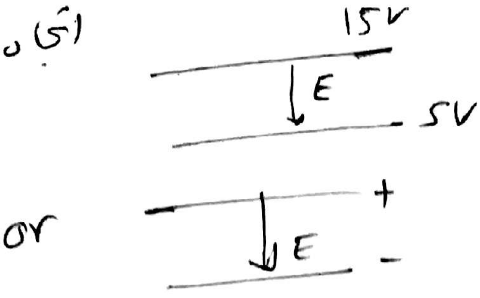
∴ فرق الجهد بين نقطتين لا يعتمد ع المسار ... يعتمد فقط على نقطتي البدايه والنهايه

$$\boxed{\Delta V_{final-initial} = \frac{W}{Q} = -\int_{initial}^{final} E \cdot dl}$$

J/C = Volt

اتى ما يمثل من الأعلى للجهد الأقل

معلومات صغيرة

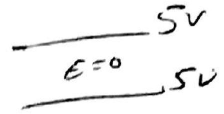


$V_2 - V_1 = -\int E \cdot dl = -E\, dl \cos 180 = +Ed$

$\therefore V_2 > V_1$

E من الأعلى للأقل

لاحظ لا يعني انه $E =$ صفر أن $V =$ صفر (لالا) لأنه $\Delta V = E \cdot d$ فاذا ΔV هو اللي بصفر



$\Delta V = 0 \longrightarrow V_2 - V_1 = 0 \;,\; V_1 = V_2$

لا يوجد شغل لأنه لا يوجد فرق جهد

∴ الشغل الموجود من جهد لآخر يساوي صفر

① ★ Potential due to infinite line charge ★

$$V_{ab} = -\int_b^a E \cdot dl = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\, \hat{a_r} \cdot \overline{dl}$$

$= V_a - V_b$

$$= -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\, \hat{a_r} \cdot (dr\, \hat{a_r} + \cancel{r\, d\phi\, \hat{a_\phi}} + \cancel{dz\, \hat{a_z}})$$

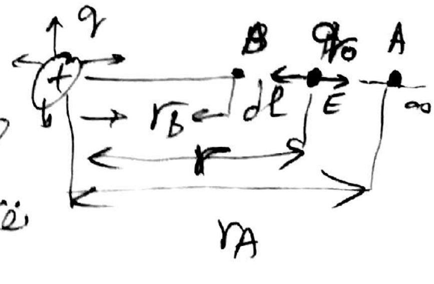
$$= -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{+\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r)\Big|_a^b = \frac{+\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \left(\ln(b) - \ln(a)\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

② ★ Potential due to Point charge ★

نفرض شحنة q موجبة والمطلوب ايجاد فرق الجهد بين A و B الناتج من q

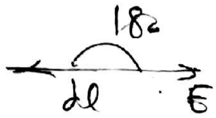
نفرض شحنة q_0 تتحرك من A إلى B



$V_{ab} = V_a - V_b$

$\cancel{V_{AB}} = V_B - V_A = -\int_B^A E \cdot dl = -\int_B^A E\, dl \cos 180$

$= \int_B^A E\, dl$



اتجاه الحركة هو dl وهو عكس زيادة المسافة r ∴ نرى dl وعكس dr

$$dl = dr\,a_r$$

$$V_A - V_B = -\int_{r_B}^{r_A} E\,dr \qquad \left(E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right.$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r^2}$$

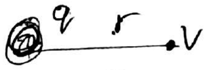
$$V_{AB} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_B}^{r_A} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

لاحظ دائماً عند نقطة خارج الشحنة ∞ عندها الجهد صفر

$$\text{if } r_B = \infty \qquad V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

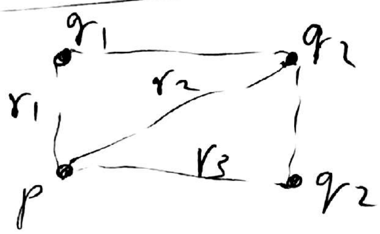
∴ الجهد الناتج عن شحنة نقطية على بعد مسافة r

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



ونعوض في القانون عن q بإشارتها السالبة أو الموجبة

(3) potential due to group of charges



$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

الجهد الناتج عن q_1 عند p

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3}$$

مجموع جبري واستخدام إشارتها

EX(5) If $E = 6x^2 \hat{a_x} + 6y \hat{a_y} + 4 \hat{a_z}$ V/m

find (a) V_{MN} if $M(2,6,-1)$ & $N(-3,-3,2)$

~~(b) V_M if $V=0$ at $Q(4,-2,-35)$~~

~~(c) V_N if $V=2$ at $P(1,2,-4)$~~

$$V_{MN} = V_M - V_N = -\int_N^M E \cdot dL$$

(a)

$$= -\int_N^M (6x^2 \hat{a_x} + 6y \hat{a_y} + 4 \hat{a_z}) \cdot (dx \hat{a_x} + dy \hat{a_y} + dz \hat{a_z})$$

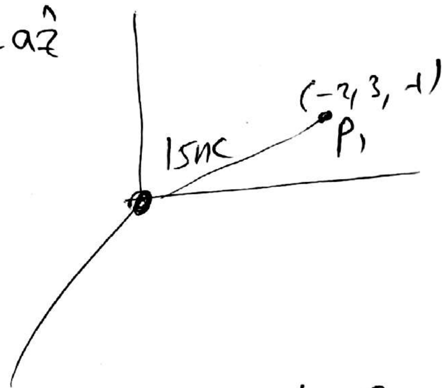
$$= -\left[\int_{-3}^{2} 6x^2 dx + \int_{-3}^{6} 6y\, dy + \int_{2}^{-1} 4\, dz\right]$$

$$= -\left[\frac{6x^3}{3}\Big|_{-3}^{2} + \frac{6y^2}{2}\Big|_{-3}^{6} + 4z\Big|_{2}^{-1}\right] = -139 \text{ volt}$$

(b) ~~V_M if $V=0$ at $Q(4,-2,-35)$~~ equipotential surface

EX(6) $q = 15$ nC at the origin, calc. V_1 if P_1 located at $P_1(-2,3,-1)$ and (a) $V=0$ at $(6,5,4)$ (b) $V=0$ at infinity

Sol



- $r_A = (-2,3,-1) - (0,0,0) = -2\hat{a_x} + 3\hat{a_y} - \hat{a_z}$

  $|r_A| = \sqrt{14}$

- $r_B = 6,5,4 \longrightarrow |r_B| = \sqrt{77}$

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|r_A|} - \frac{1}{|r_B|}\right)$$

$$V_A - 0 = \frac{15\times10^{-9}}{4\pi\times 8.85\times10^{-12}}\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{77}}\right) = 20.7 \text{ V}$$

Scanned by CamScanner

10

b- $V_A - V_{\infty} = \frac{13\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\infty}\right)$

$\therefore V_A = 135\times\frac{1}{\sqrt{14}} \simeq 36\,V$

[illegible]

c - $V = 5$ at $(2, 0, 4)$

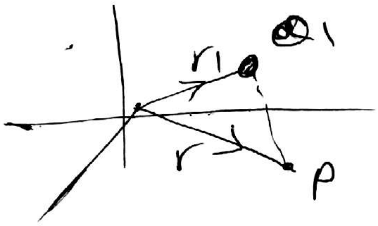
$|\bar{r}_B| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$V_A - 5 = \frac{13\times10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 5.8$

$\therefore V_A = 10.8\,V$

$\boxed{\text{Generally}}$

For single charge Q_1 located at r_1



the potential $V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 (|r - r_1|)}$

For Multiple charges $V(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |r - r_m|}$

If the charge is uniformly distributed at ~~[illegible]~~

$V(r) = \int_{Vol} \frac{\rho_v(r')\,dv}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$ Volume

or $V(r) = \int \frac{\rho_s\,ds}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$ Surface

or $V(r) = \int \frac{\rho_L\,dl}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$ Line